

# “Statistically induced phase transitions and anyons in 1D optical lattices”

Tassilo Keilmann et al., Nature Communications 2, N° 361 (2011)

Eduardo Sánchez Burillo

ICMA (CSIC-Unizar)

3 de diciembre de 2013



- 1 Introducción
- 2 Modelo
- 3 Propuesta experimental
- 4 Resultados
  - Densidad de momentos
  - Diagrama de fases
  - Densidad en posiciones con trampa óptica
- 5 Sumario

# INTRODUCCIÓN

# Postulado de simetrización

- Por el postulado de simetrización, en mecánica cuántica las partículas idénticas son **indistinguibles**.
- Hay partículas idénticas de dos naturalezas, dependiendo del espín:
  - 1 Espín semientero  $\Rightarrow$  **Fermiones**

$$\Psi_F(x_1, x_2) = -\Psi_F(x_2, x_1) \quad (1)$$

- 2 Espín entero  $\Rightarrow$  **Bosones**

$$\Psi_B(x_1, x_2) = \Psi_B(x_2, x_1) \quad (2)$$

# Aniones

- ¿Podrían existir partículas indistinguibles que interpolaran entre bosones y fermiones?

$$\Psi_A(x_1, x_2) = e^{i\theta} \Psi_A(x_2, x_1), \quad \theta \in (0, \pi) \quad (3)$$

- Las hipotéticas partículas se denominan **aniones** (del inglés *ANYons*).

## Pero... ¿existen?

- **En 3 o más dimensiones es imposible su existencia**, pero en sistemas de baja dimensionalidad nada lo impide.
- Las excitaciones del efecto Hall cuántico fraccionario (2D) son aniones.
- **¿Y en 1D?**
- En los últimos años ha habido varios trabajos teóricos respecto a aniones en 1D, siendo un ejemplo el artículo presentado aquí.

# MODELO

# Aniones en 1D

- En segunda cuantización, los operadores creación y destrucción aniónicos de una red en 1D satisfacen:

$$a_j a_k^\dagger - e^{-i\theta \text{sign}(j-k)} a_k^\dagger a_j = \delta_{jk}, \quad a_j a_k = e^{i\theta \text{sign}(j-k)} a_k a_j, \quad (4)$$

donde  $\text{sign}(x) = 1, 0, -1$  si  $x$  es positivo, cero o negativo respectivamente.

- $\theta$ , conocida como **fase estadística**, interpola entre bosones ( $\theta = 0$ ) y fermiones ( $\theta = \pi$ ).
- Se trata de aniones “bosónicos”, ya que en el mismo sitio ( $j = k$ ) satisfacen relaciones bosónicas  $\forall \theta$ . De ahí que sea más conveniente llamarlos “pseudofermiones” en el límite  $\theta = \pi$ . Igualmente, se pueden construir aniones “fermiónicos” (Yajiang Hao et al., PRA 79, 043633 (2009)).



# Hamiltoniano de “anyon-Hubbard”

- Los autores consideran el modelo de Bose-Hubbard en 1D, pero con operadores aniónicos:

$$H_{AH} = -J \sum_{j=1}^{L-1} (a_j^\dagger a_{j+1} + h.c.) + \frac{U}{2} \sum_{j=1}^L n_j (n_j - 1), \quad (5)$$

con  $n_j = a_j^\dagger a_j$ .

# Bosonización

- Se introduce la versión fraccionaria de la transformación de Jordan-Wigner:

$$b_j := a_j \exp \left( -i\theta \sum_{l=1}^{j-1} n_l \right) \quad (6)$$

- $\{b_j\}$  y  $\{b_j^\dagger\}$  satisfacen las relaciones canónicas de conmutación:

$$[b_j, b_k^\dagger] = \delta_{jk}, \quad [b_j, b_k] = 0 \quad (7)$$

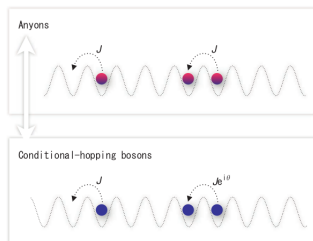
- El operador número no cambia:  $n_j = a_j^\dagger a_j = b_j^\dagger b_j$ .

# Modelo resultante

- Aplicando la transformación fraccionaria de J-W al Hamiltoniano:

$$H_{AH} = -J \sum_{j=1}^{L-1} (b_j^\dagger b_{j+1} e^{i\theta n_j} + h.c.) + \frac{U}{2} \sum_{j=1}^L n_j (n_j - 1), \quad (8)$$

- Modelo de Bose-Hubbard con interacción entre  $j$  y  $j + 1$  dependiente de la ocupación de  $j$ .



# PROPUESTA EXPERIMENTAL

## ¿Qué queremos simular?

- Los autores proponen una realización experimental del sistema.
- “Por simplicidad”, la propuesta experimental restringe las ocupaciones a  $n_j = 0, 1, 2$ .
- Con esta restricción, la matriz del Hamiltoniano de  $(j, j + 1)$  sería:

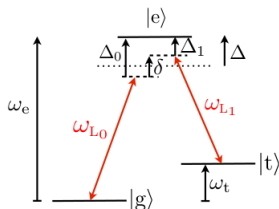
$$\begin{pmatrix}
 0 & -J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & U & -\sqrt{2}Je^{-i\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\sqrt{2}Je^{i\theta} & 0 & -\sqrt{2}J & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}J & U & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U & -2Je^{-i\theta} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2Je^{i\theta} & U & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{matrix}
 |10\rangle \\
 |01\rangle \\
 |20\rangle \\
 |11\rangle \\
 |02\rangle \\
 |21\rangle \\
 |12\rangle
 \end{matrix}$$

# Sistema físico

- Consideran una red óptica unidimensional suficientemente profunda, de tal modo que inicialmente la interacción entre primeros vecinos es despreciable.
- “Inclinan” la red en energías una cantidad  $E_0$ .
- Consideran una segunda red óptica auxiliar junto a la primera puesta de tal forma que hay solapes entre los autoestados de ambas redes. El objetivo de esta segunda red es **inducir las interacciones entre primeros vecinos de la red original**.

# Inducción de las interacciones (i)

- Las interacciones buscadas se logran mediante **eliminación adiabática**.
- Consiste en aplicar un par de láseres no resonantes por cada 2 niveles que queremos acoplar.



- Aquí  $|g\rangle$  y  $|t\rangle$  es cualquier par de niveles que queremos conectar ( $|20\rangle$  y  $|11\rangle$ , etc.), mientras que  $|e\rangle$  es un autoestado de la red auxiliar.

## Inducción de las interacciones (ii)

- La interacción entre  $|g\rangle$  (o  $|t\rangle$ ) y  $|e\rangle$  es  $\gamma_i = \Omega_i^e W_i^e$ , con:
  - 1  $\Omega_i^e$  es la frecuencia de Rabi entre  $|i\rangle$  y  $|e\rangle$ .
  - 2  $W_i^e$  es el solape entre  $|i\rangle$  y  $|e\rangle$ .
- Si  $\Delta \gg \gamma_i$ , entonces  $|e\rangle$  queda prácticamente deshabitado para todo tiempo y sólo  $|g\rangle$  y  $|t\rangle$  son relevantes para la dinámica, pero **ya no son independientes: interaccionan**.
- El acoplo inducido es:  $-\gamma_g \gamma_t^* / 4\Delta$ . Basta con introducir los desfases necesarios entre los láseres aplicados para obtener las distintas constantes de interacción ( $-J$ ,  $-\sqrt{2}J e^{-i\theta}$ , etc.).



# RESULTADOS

# Resolución del sistema

- Estudian las propiedades del estado fundamental del sistema a número de excitaciones  $N$  fijo.
- Lo obtienen mediante DMRG (Density Matrix Renormalization Group).

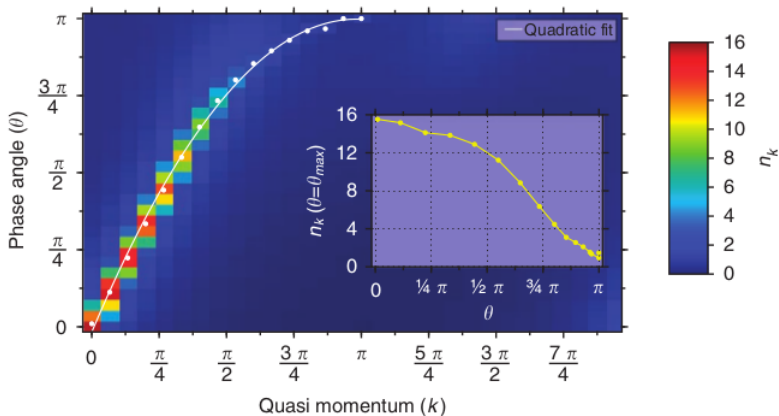


Figura: Densidad de momentos para  $L = 30$ ,  $N = 31$ ,  $U/J = 0,2$ .

# Desplazamiento del pico

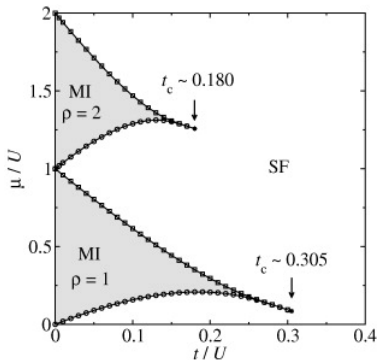
- Para  $\theta = 0$  (modelo de Bose-Hubbard), se obtiene la típica distribución picuda en torno a  $k = 0$ . Notar que para el rango de parámetros ( $U/J = 0,2$ ) el sistema está en la fase **superfluida**.
- Al aumentar  $\theta$ , el centro del pico se desplaza. La curva  $\theta_{\text{máx}}(k)$  es **no lineal** (aproximadamente cuadrática), frente al caso de interacción  $-J(e^{i\theta} b_j^\dagger b_{j+1} + h.c.)$  (tight-binding con campo magnético uniforme), en el cual es lineal.

## Suavizado de $n_k$

- El máximo  $n_k(\theta_{\text{máx}})$  disminuye claramente con  $\theta$ , siendo  $n_k$  **prácticamente plana en el límite pseudofermiónico** ( $\theta = \pi$ ). Ello quiere decir además que hemos perdido **coherencia en la fase**.
- Interpretación: al aumentar  $\theta$ , se da más relevancia a la interacción condicional  $e^{i\theta n_j}$ . Por tanto, los procesos de salto conectando sitios vecinos aportarán cada uno distintas fases que al final cancelarán, dando lugar a superposiciones incoherentes.

## Caso bosónico

- En el modelo de Bose-Hubbard ( $\theta = 0$ ) se sabe que el sistema sufre una transición de fase a temperatura cero de **aislante de Mott** (partículas bien localizadas en posiciones) para  $J/U$  pequeño a fase **superfluida** (esencialmente un condensado de BE) para  $J/U$  grande.

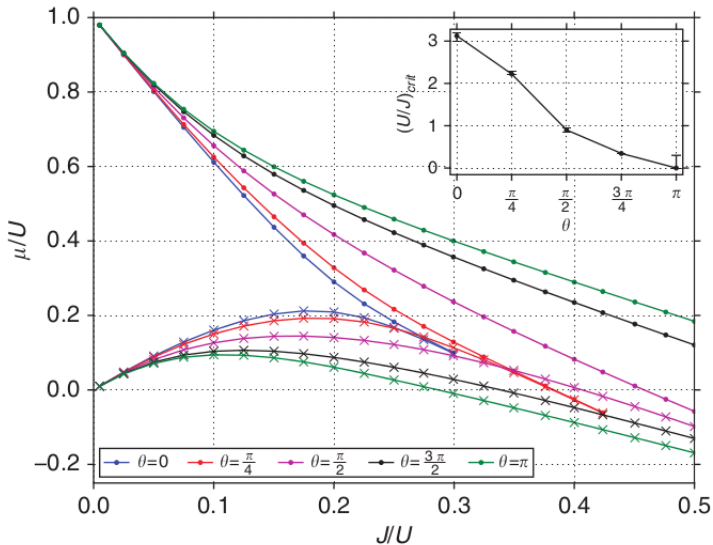


- El objetivo es ver cómo influye  $\theta$  en el diagrama de fases.

# Estudio exacto

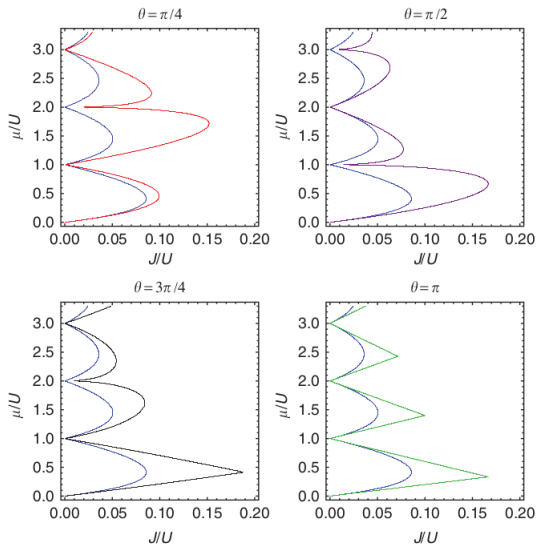
- Dado un  $L$ , obtienen el estado fundamental mediante DMRG para  $N = L$  y  $N = L \pm 1$ , con  $L=15, 30, 60, 90$  y  $120$ .
- Calculan los gaps  $\Delta E^\pm(L) = E(L \pm 1) - E(L)$  y los obtienen en el límite termodinámico  $L \rightarrow \infty$  mediante escalado de tamaño finito; usan  $\varepsilon = \Delta E^+ - \Delta E^-$ .
- En la fase superfluida,  $\varepsilon = 0$ , mientras que en la fase de Mott  $\varepsilon \neq 0$ .

# Diagrama de fases en función de $\theta$





# Diagramas de fases en campo medio



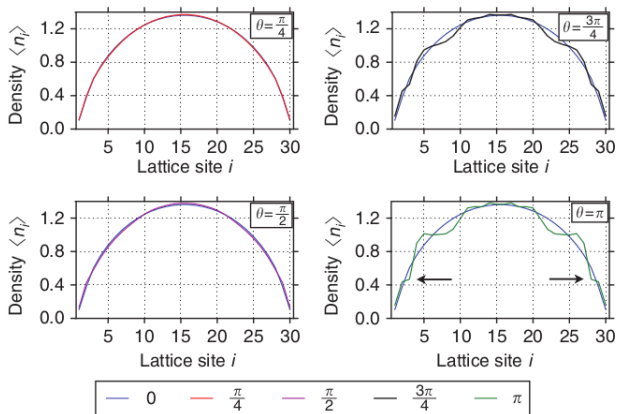
- Se añade al Hamiltoniano una trampa óptica:

$$H = H_{AH} + V \sum_{i=1}^L \left( \frac{L+1}{2} - i \right)^2 n_i \quad (9)$$

- En el modelo de Bose-Hubbard ( $\theta = 0$ )  $\langle n_i \rangle$  muestra un perfil cuadrático en fase superfluida, mientras que en fase Mott la parábola se deforma dando valores constantes para valores enteros de  $\langle n_i \rangle$ .
- Fijan  $L = N = 30$ ,  $J/U = 0,5$  y obtienen el perfil  $\langle n_i \rangle$  vs  $i$  para distintos valores de  $\theta$ .
- Para  $\theta = 0$  y esa relación  $J/U$ , el sistema está en la fase superfluida mientras que para un cierto  $\theta$  crítico pasará a fase de Mott.

## $\langle n_j \rangle$ fraccionario

- Para  $\theta$  suficientemente alto, además de una llanura para  $\langle n_j \rangle = 1$ , aparece un pequeño llano en  $\langle n_j \rangle = 1/2$ .



# SUMARIO

# Crítica

- El llano que aparece en  $\langle n_i \rangle$  en la fase de Mott inducida mediante  $\theta$  no es demasiado espectacular.
- No parece que un sistema que requiere de 8 láseres diferentes por cada par de primeros vecinos sea demasiado sencillo de implementar... y no hablemos ya de si tomamos una truncación para  $n_j$  mayor. De hecho, a día de hoy nadie lo ha hecho.

# Resumen

- Introducen una forma de convertir aniones bosónicos en bosones para sistemas en 1D (transformación fraccionaria de Jordan-Wigner).
- Obtienen y estudian el nivel fundamental del modelo de Hubbard para aniones en 1D.
- Inducen una transición de fase cambiando la fase estadística  $\theta$ .
- Proponen una implementación experimental del sistema.

Any(on) question?

